III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

X. osztály

1. feladat.
a) Bizonyítsd be, hogy a $\log_2 3 + \log_3 2$ szám egész része 2.
b) Igazold, hogy

$$\frac{\log_a x}{\log_{bc} x} + \frac{\log_b x}{\log_{ac} x} + \frac{\log_c x}{\log_{ab} x} \geq 6$$

bármely $a, b, c, x > 1$ valós szám esetén. *Matlap*

Megoldás. a) Legyen $A = \log_2 3 + \log_3 2$. Mivel $\log_2 3 > 0$ és $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} > 0$, így **(1 pont)**

$$A = \log_2 3 + \log_3 2 = \log_2 3 + \frac{1}{\log_2 3} > 2. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

De $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$ és $\log_2 3 < \log_2 4 = 2$, így $A = \log_3 2 + \log_2 3 < 3$, tehát $A \in (2, 3)$, ahonnan $[A] = 2$. **(2 pont)**

b) Teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}; \quad \log_b x = \frac{1}{\log_x b}; \quad \log_c x = \frac{1}{\log_x c}$$

$$\log_{bc} x = \frac{1}{\log_x bc}; \quad \log_{ac} x = \frac{1}{\log_x ac}; \quad \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezek alapján az adott egyenlőtlenség a következőképpen írható fel:

$$\frac{\log_x bc}{\log_x a} + \frac{\log_x ac}{\log_x b} + \frac{\log_x ab}{\log_x c} \geq 6,$$

vagyis

$$\frac{\log_x b + \log_x c}{\log_x a} + \frac{\log_x a + \log_x c}{\log_x b} + \frac{\log_x a + \log_x b}{\log_x c} \geq 6. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Legyen $\log_x a = p$, $\log_x b = q$ és $\log_x c = r$, $p, q, r > 0$, mivel $a, b, c, x > 1$. Ez alapján az igazolandó egyenlőtlenség

$$\frac{q+r}{p} + \frac{p+r}{q} + \frac{p+q}{r} \geq 6 \iff \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + \left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right) + \left(\frac{r}{q} + \frac{q}{r}\right) \geq 6, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ami igaz, mert $y + \frac{1}{y} \geq 2$, minden $y > 0$ esetén.
Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Adottak az $a = \sqrt[3]{22 + 10\sqrt{7}}$ és $b = \sqrt[3]{22 - 10\sqrt{7}}$ valós számok.
a) Bizonyítsd, hogy $a + b \in \mathbb{N}$.
b) Igazold, hogy $a^{2n} + b^{2n}$ osztható 8-cal, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. a) Mivel

$$a \cdot b = \sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{22-10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{-216} = -6, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

legyen $x = a+b$, de $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. **(1 pont)**
Innen $x^3 = 44 - 18x$, ahonnan

$$x^3 + 18x - 44 = 0 \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$x^3 - 8 + 18x - 36 = 0$$
$$(x-2)(x^2+2x+22) = 0. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $x^2 + 2x + 22 > 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, kapjuk, hogy $x = 2$, vagyis $a + b = 2 \in \mathbb{N}$. **(1 pont)**

b) A következőket írhatjuk

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad \Longrightarrow \quad a^2 + b^2 = 16 \,\vdots\, 8$$
$$a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 \quad \Longrightarrow \quad a^4 + b^4 = 23 \cdot 8 \,\vdots\, 8 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Legyen $S_n = a^{2n} + b^{2n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva a matematikai indukció módszerét igazoljuk, hogy $S_n \,\vdots\, 8$, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$-re. **(1 pont)**

$$P(n): \quad S_n \,\vdots\, 8, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

A fenti számítások alapján $P(1)$ és $P(2)$ igaz.

Feltételezzük, hogy $S_{k-1} \,\vdots\, 8$ és $S_k \,\vdots\, 8$, igazoljuk, hogy $S_{k+1} \,\vdots\, 8$.
Mivel

$$S_k \cdot (a^2 + b^2) = S_{k+1} + a^2b^2 \cdot S_{k-1} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

következik, hogy $S_{k+1} = (a^2+b^2)S_k - a^2b^2S_{k-1}$. Felhasználva, hogy $S_{k-1} \,\vdots\, 8$ és $S_k \,\vdots\, 8$, kapjuk, hogy $S_{k+1} \,\vdots\, 8$. Tehát $S_n \,\vdots\, 8$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a^{2x}}{a^{2x} + a}$ függvény, ahol a pozitív valós szám.

a) Bizonyítsd be, hogy $f(x) + f(1-x) = 1$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Számítsd ki az $f\left(\dfrac{1}{2020}\right) + f\left(\dfrac{2}{2020}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2019}{2020}\right)$ összeget!

Oláh-Ilkei Árpád, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Teljesül, hogy

$$f(1-x) = \frac{a^{2(1-x)}}{a^{2(1-x)} + a} = \frac{\frac{a^2}{a^{2x}}}{\frac{a^2}{a^{2x}} + a} = \frac{a^2}{a^{2x}} \cdot \frac{a^{2x}}{a^2 + a \cdot a^{2x}} = \frac{a^2}{a(a + a^{2x})} = \frac{a}{a + a^{2x}}, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

és így

$$f(x) + f(1-x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a} + \frac{a}{a^{2x} + a} = \frac{a^{2x} + a}{a^{2x} + a} = 1, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

b) Csoportosítva a függvényértékeket és alkalmazva az a) pont eredményeit, a következőket kapjuk:

$$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(1-\frac{1}{2020}\right)=f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2019}{2020}\right)=1$$
$$f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(1-\frac{2}{2020}\right)=f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{2018}{2020}\right)=1$$
$$\vdots$$
$$f\left(\frac{1009}{2020}\right)+f\left(1-\frac{1009}{2020}\right)=f\left(\frac{1009}{2020}\right)+f\left(\frac{1011}{2020}\right)=1, \qquad (\textbf{2 pont})$$

valamint

$$f\left(\frac{1010}{2020}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^{2\cdot\frac{1}{2}}}{a^{2\cdot\frac{1}{2}}+a}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Innen következik, hogy

$$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{1009 darab 1-es}}+\frac{1}{2}=1009+\frac{1}{2}=\frac{2019}{2}. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat.

a) Adottak a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ számok úgy, hogy $|z_1|=|z_2|=1$ és $\lambda z_1 z_2 \neq -1$, ahol $\lambda \in \{-1,1\}$. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

b) Igazold, hogy bármely a valós szám esetén léteznek olyan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ komplex számok, amelyekre $|z_1|=|z_2|$, valamint $\lambda z_1 z_2 \neq -1$ úgy, hogy az a szám felírható legyen

$$\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda z_1 z_2}$$

alakban, ahol $\lambda \in \{-1,1\}$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Ismert, hogy $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, illetve, ha $z=\overline{z}$, akkor $z\in\mathbb{R}$. **(2 pont)**

a) Ha $\lambda=1$

$$\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1z_2}}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1},$$

ahonnan $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$. **(2 pont)**

Ha $\lambda=-1$, akkor

$$\overline{\left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{1-\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}}{1-\frac{1}{z_1z_2}}=\frac{z_2-z_1}{z_1z_2-1}=\frac{z_1-z_2}{1-z_1z_2},$$

ahonnan $\dfrac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} \in \mathbb{R}$. **(2 pont)**

b) I. eset: $\lambda = 1$. Tekintsük a

$$z_1 = i \quad \text{és} \quad z_2 = \frac{1 + ai}{a + i}$$

számokat, ahol $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $|z_1| = |z_2| = 1$ és $z_1 \cdot z_2 = \frac{i-a}{a+i} \neq -1$.

Innen következik, hogy

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2} = \frac{i + \frac{1+ai}{a+i}}{1 + \frac{i-a}{a+i}} = \frac{ai - 1 + 1 + ai}{a + i + i - a} = \frac{2ai}{2i} = a \in \mathbb{R}.$$ **(2 pont)**

II. eset: $\lambda = -1$. Ha

$$z_1 = i \quad \text{és} \quad z_2 = \frac{a - i}{ai - 1},$$

akkor $|z_1| = |z_2| = 1$ és $z_1 \cdot z_2 = \frac{ai+1}{ai-1} \neq 1$, valamint

$$\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} = \frac{i - \frac{a-i}{ai-1}}{1 - \frac{ai+1}{ai-1}} = \frac{-a - i - a + i}{ai - 1 - ai - 1} = \frac{-2a}{-2} = a \in \mathbb{R}.$$ **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■